

**AL/CD-401 (GS)**

**B.Tech./B.Tech.(Working Professional) IV Semester**

Examination, November 2023

**Grading System (GS)**

**Introduction to Discrete Structure and Linear**

**Algebra**

**Time : Three Hours**

**Maximum Marks : 70**

- Note:** i) Answer any five questions.  
किन्ही पाँच प्रश्नों को हल कीजिए।
- ii) All questions carry equal marks.  
सभी प्रश्नों के समान अंक है।
- iii) In case of any doubt or dispute the English version question should be treated as final.  
किसी भी प्रकार के संदेह अथवा विवाद की स्थिति में अंग्रेजी भाषा के प्रश्न को अंतिम माना जायेगा।

1. a) Prove that:

सिद्ध कीजिए।

i)  $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$

ii)  $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

b) With the help of Venn-diagram, prove that

$(A \cup B)' = A' \cap B'$  and  $(A \cap B)' = A' \cup B'$

वेन-आरेख की सहायता से सिद्ध कीजिए कि  $(A \cup B)' = A' \cap B'$  और  $(A \cap B)' = A' \cup B'$  है।

2. a) Consider the set  $Z$  of integers  $m > 1$ . We say that  $x$  is congruent to  $y$  modulo  $m$  written as  $x \equiv y \pmod{m}$

if  $x - y$  is divisible by  $m$ . Show that this defines an equivalence relation on  $Z$ .

पूर्णांक  $m > 1$  के समुच्चय  $Z$  पर विचार करें। हम कहते हैं कि  $x, y$  modulo  $m$  के सर्वांगसम है जिसे  $x \equiv y \pmod{m}$  के रूप में लिखा जाता है।

यदि  $x - y, m$  से विभाज्य हो। दिखाइए कि यह  $Z$  पर एक तुल्यता संबंध को परिभाषित करता है।

b) Let  $D_m$  denotes the positive divisors of  $m$  ordered by divisibility. Draw the Hasse diagrams of the following:

i)  $D_{15}$

ii)  $D_{24}$

मान लीजिए  $D_m$  विभाज्यता के आधार पर  $m$  के धनात्मक भाजक को दर्शाता है। निम्नलिखित के हासे आरेख बनाइए।

i)  $D_{15}$

ii)  $D_{24}$

3. a) Consider the set  $Q$  of rational numbers and let  $*$  be the operation on  $Q$  defined by:

$$a * b = a + b - ab$$

i) Is  $(Q, *)$  a semi-group. Is it commutative.

ii) Find the identity element for  $*$ .

iii) Do any elements in  $Q$  have inverse? What is it?

परिमेय संख्याओं के समुच्चय  $Q$  पर विचार करें और  $*$  को  $Q$  पर संक्रिया द्वारा परिभाषित होने दें

$$a * b = a + b - ab$$

i) क्या  $(Q, *)$  एक अर्ध-समूह है? क्या यह क्रमविनिमेय है?

ii)  $*$  के लिए पहचान तत्व खोजें।

iii) क्या  $Q$  में किसी तत्व का व्युत्क्रम है? यह क्या है?

b) Define Ring with example. Also explain Commutative ring and Ring homomorphism.

रिंग को उदाहरण सहित परिभाषित करें। क्रमविनिमेय रिंग और वलय समरूपता को भी समझाइए।

4. a) Solve the following recurrence relations

$$a_n = 3a_{n-1} - 3a_{n-2} + a_{n-3}, a_0 = 0, a_3 = 3, a_5 = 10$$

निम्नलिखित पुनरावृत्ति संबंधों को हल करें।

$$a_n = 3a_{n-1} - 3a_{n-2} + a_{n-3}, a_0 = 0, a_3 = 3, a_5 = 10$$

b) Show that

$$(((p \vee q) \wedge \neg(\neg p \wedge (\neg q \vee \neg r))) \vee (\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge \neg r)) \equiv T$$

is a tautology by laws of algebra of propositions.

दिखाइए कि

$$(((p \vee q) \wedge \neg(\neg p \wedge (\neg q \vee \neg r))) \vee (\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge \neg r)) \equiv T$$

प्रस्तावों के बीजगणित के नियमों के अनुसार एक टॉटोलॉजी है।

5. a) Obtain the conjunctive normal form of

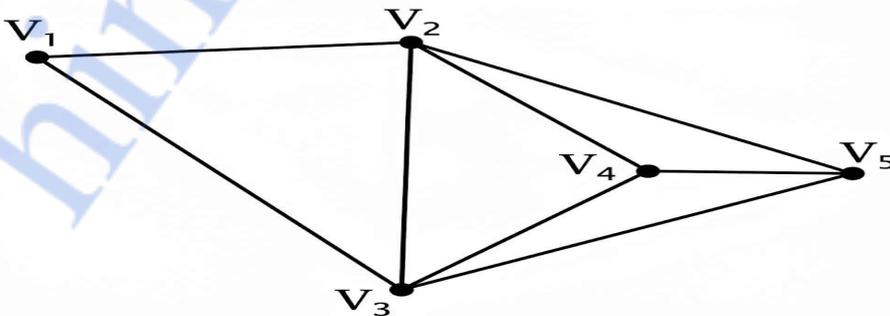
संयोजक सामान्य रूप प्राप्त करें।

i)  $p \wedge (p \Rightarrow q)$

ii)  $\sim p \Rightarrow [r \wedge (p \Rightarrow q)]$

b) Check for Euler and Hamiltonian graphs:

यूलर और हैमिल्टोनियन ग्राफ की जाँच करें।



6. a) What is coloring problem? Hence define coloring of graph.  
रंग भरने की समस्या क्या है? इसलिए ग्राफ के रंग को परिभाषित करें।

b) Solve the simultaneous equations:

$$25x + 15y - 5z = 35, 15x + 18y + 0.z = 33, -5x + 0.y = 11z = 6$$

Using Cholesky Decomposition.

समसमिक समीकरणों का हल करें।

$$25x + 15y - 5z = 35, 15x + 18y + 0.z = 33, -5x + 0.y = 11z = 6$$

चोलेस्की अपघटन का उपयोग करें।

7. a) What is null hypothesis? What is its significance in statistical variance?

शून्य परिकल्पना क्या है? सांख्यिकीय भिन्नता में इसका क्या महत्व है?

b) An agricultural research organization wants to study the effect of four types of fertilizers on the yield of crop. It divided the entire field into 24 plots of land and used fertilizer at random in 6 plots of land. Part of calculations are given below:

Source of Variation	Sum of Squares	Degree of freedom	Mean Squares	Test Statistic
fertilizers	2940	3	-	5.99
Within groups	-	-	-	
Total	6212			

i) Fill in the blanks in the ANOVA table.

ii) Test at  $\alpha = 0.5$ , whether the fertilizers differ.

एक कृषि अनुसंधान संगठन फसल की उपज पर चार प्रकार के उर्वरकों के प्रभाव का अध्ययन करना चाहता है। इसने पूरे खेत को 24 भूखंडों में विभाजित किया और 6 भूखंडों में यादृच्छिक रूप से उर्वरक का उपयोग किया। गणना का भाग नीचे दिया गया है:

विविधता का स्रोत	वर्गों का योग	स्वतंत्रता की डिग्री	माध्य वर्ग	परीक्षण के आंकड़े
उर्वरक	2940	3	-	5.99
समूहों के भीतर	-	-	-	
कुल	6212			

i) ANOVA तालिका में रिक्त स्थानों की पूर्ति करें।

ii)  $\alpha = 0.5$  पर परीक्षण करें, कि क्या उर्वरक महत्वपूर्ण रूप से भिन्न हैं।

8. a) A coin was tossed 400 times and the head turned up 216 times. Test the hypothesis that the coin is unbiased.

एक सिक्के को 400 बार उछाला गया और चित्त 216 बार आया। इस परिकल्पना का परीक्षण करें कि सिक्का निष्पक्ष है।

- b) Find the singular value decomposition of the matrix:

$$A = \begin{bmatrix} -4 & -7 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

मैट्रिक्स का एकल मान अपघटन ज्ञात करें।

$$A = \begin{bmatrix} -4 & -7 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

\*\*\*\*\*