Roll No. ………………

CY-401 (GS)

B.Tech., IV Semester

Examination, December 2024

Grading System (GS)

Introduction to Linear Algebra

Time : Three Hours

Maximum Marks : 70

Note: i) Answer any five questions.
किन्ही पाँच प्रश्नों को हल कीजिए।

ii) All questions carry equal marks.
सभी प्रश्नों के समान अंक है।

iii) In case of any doubt or dispute the English version question should be treated as final.
किसी भी प्रकार के संदेह अथवा विवाद की स्तिथि मैं अंग्रेजी भाषा के प्रश्न को अंतिम माना जायेगा।

1. a) Prove: Let V be a vector space and W be a subspace of V. Then the map $\eta : V \to V / W$ defined by $\eta(x) = x + W$, $x \in V$, is a linear transformation.

सिद्ध करें : मान लें कि V एक सदिश समष्टि है और W, V का उपसमष्टि है। तब मानचित्र $\eta : V \to V / W$ जो $\eta(x) = x + W$, $x \in V$ द्वारा परिभाषित है, एक रैखिक परिवर्तन है।

b) Prove that, if V_0 is a subspace of a vector space V, then there exists a subspace V_1 of V such that $V = V_0 + V_1$ and $V_0 \cap V_1 = \{0\}$.
सिद्ध कीजिए कि, यदि V_0 एक सदिश समष्टि V का उपसमष्टि है, तो V का एक उपसमष्टि V_1 विद्यमान है जैसा कि $V = V_0 + V_1$ तथा $V_0 \cap V_1 = \{0\}$।

2. a) Find two linear operators T and U on R^2 such that $TU = 0$ but $UT \neq 0$.

R^2 पर दो रैखिक ऑपरेटर T और U ज्ञात कीजिए जिसके लिए $TU = 0$ परंतु $UT \neq 0$ हो।

b) Find the characteristic polynomial and the minimal polynomial for the matrix:

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

मैट्रिक्स के लिए विशेषता बहुपद और न्यूनतम बहुपद खोजें।

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

3. a) If T be the linear operator on R^3 which is represented in the standard basis by the matrix

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{bmatrix}$$

Prove that T is diagonalizable. Find the diagonalizable matrix P that PAP^{-1} is diagonal.

यदि T, R^3 पर एक रैखिक ऑपरेटर है जिसे मानक बेसिस द्वारा एक मैट्रिक्स द्वारा प्रतिनिधित किया जाता है,

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{bmatrix}$$

तो सिद्ध करें कि T डायगोनलाइजेबल है। डायगोनलाइजेबल मैट्रिक्स P को खोजें जिसके लिए PAP^{-1} डायगोनल हो।

b) Given a 2 × 2 matrix :

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Use the Cayley-Hamilton theorem to calculate $B^2 - 9B + 14$ and verify that it results in the zero matrix.

2 × 2 मैट्रिक्स दिया गया है :

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$B^2 - 9B + 14$ की गणना करने के लिए केली-हैमिल्टन प्रमेय का उपयोग करें और सत्यापित करें कि इसका परिणाम शून्य मैट्रिक्स है।

4. a) Let D be a symmetric matrix given by:

$$D = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

Find the eigenvalues and eigenvectors of D.

मान लीजिए D एक सममित मैट्रिक्स है जो दिया गया है:

$$D = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

D के इगनवैल्यूज़ और इगनवैक्टर्स का पता लगाइए।

b) What are the essential properties of inner product spaces? Provide an example of a vector space that satisfies these properties.

आंतरिक गुणनफल समष्टि के आवश्यक गुण क्या हैं? एक सदिश समष्टि का एक उदाहरण प्रदान करें, जो इन गुणों को संतुष्ट करता है।

5. a) Consider the matrix A given by:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

i) Find the Jordan canonical form of the matrix A.

ii) Determine the corresponding Jordan basis.

मैट्रिक्स A पर विचार करें जो निम्न प्रकार दिया गया है:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

i) मैट्रिक्स A का जॉर्डन केनॉनिकल रूप ज्ञात करें।

ii) संबंधित जॉर्डन आधार निर्धारित करें।

b) Show that the set of all continuous functions on the interval [0, 1] equipped with the inner product $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$ forms an inner product space. Justify that this definition meets the properties of an inner product.

दर्शाइए कि अन्तराल [0, 1] पर सभी सतत फलनों का समुच्चय, जो आंतरिक गुणनफल $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)\, g(x)\, dx$ से सुसज्जित है, एक आंतरिक गुणनफल समष्टि बनाता है। स्पष्ट करें कि यह परिभाषा आंतरिक गुणनफल के गुणों को किस प्रकार पूरा करती है।

6. a) Let V be the space of $n \times n$ matrices over a field F, and let A be a fixed $n \times n$ matrix over F. Define a linear operator T on V by $T(B) = AB - BA$. Prove that if A is a nilpotent matrix, then T is a nilpotent operator.

मान लीजिए कि V, क्षेत्र F पर n × n आयामी मैट्रिक्स का एक स्पेस है, और A क्षेत्र F पर एक निश्चित n × n मैट्रिक्स है। T(B) = AB − BA द्वारा V पर एक रैखिक ऑपरेटर T परिभाषित करें। सिद्ध करें कि यदि A एक निलपोटेंट मैट्रिक्स है, तो T एक निलपोटेंट ऑपरेटर है।

b) Let C be a 5 × 5 matrix with characteristic polynomial $(t-1)(t-2)^2(t-3)^2$. Determine the possible Jordan canonical forms of C.

मान लीजिए C एक 5 × 5 मैट्रिक्स है जिसमें विशेषता बहुपद $(t-1)(t-2)^2(t-3)^2$ है। C के संभावित जॉर्डन विहित रूपों का निर्धारण करें।

7. a) Let $T : C^3 \to C^3$ be a linear transformation with the matrix representation:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -i & 0 \\ i & 4 & -3i \\ 0 & 3i & 1 \end{bmatrix}$$

Determine whether T is Hermitian.

मान लीजिए $T : C^3 \to C^3$ मैट्रिक्स प्रतिनिधित्व के साथ एक रैखिक परिवर्तन है:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -i & 0 \\ i & 4 & -3i \\ 0 & 3i & 1 \end{bmatrix}$$

निर्धारित करें कि क्या T हर्मिटियन है।

b) Suppose $T : C^2 \to C^2$ is a linear transformation with the matrix representation

$$A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -i/\sqrt{2} \\ i/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Determine whether T is unitary or not.

मान लीजिए T : $C^2 \rightarrow C^2$ मैट्रिक्स प्रतिनिधित्व के साथ एक रैखिक परिवर्तन है:

$$A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -i/\sqrt{2} \\ i/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

निर्धारित करें कि T एकात्मक है या नहीं।

8. Write short note on any two :

a) Direct sum decompositions

b) Unitary and normal linear transformation

c) Annihilator of a subspace

किन्हीं दो पर संक्षिप्त टिप्पणी लिखिए।

अ) प्रत्यक्ष योग अपघटन

ब) एकात्मक और सामान्य रैखिक परिवर्तन

स) एक उपस्थान का समष्टिघातक

******