Roll No. ....

CY-401 (GS)

B.Tech., IV Semester

Examination, June 2022

Grading System (GS)

Introduction to Linear Algebra

Time : Three Hours

Maximum Marks : 70

Note: i) Answer any five questions.
किन्ही पाँच प्रश्नों को हल कीजिए।

ii) All questions carry equal marks.
सभी प्रश्नों के समान अंक है।

iii) In case of any doubt or dispute the English version question should be treated as final.
किसी भी प्रकार के संदेह अथवा विवाद की स्तिथि मैं अंग्रेजी भाषा के प्रश्न को अंतिम माना जायेगा।

1. a) Define
   i) Direct sum of a vector space
   ii) Dual Space of a vector space
   iii) Quotient Space of vector space
   iv) Annihilator of a sub space
   परिभाषित करें।
   i) वेक्टर स्पेस का प्रत्यक्ष योग
   ii) वेक्टर स्पेस का दोहरा स्पेस
   iii) वेक्टर स्पेस का प्रत्यक्ष योग
   iv) वेक्टर स्पेस का दोहरा स्पेस

   b) SW_1 and W_2 are the sub spaces of R^3 if $W_1 = \{(0,0,2)z : z \in R\}$ and $W_2 = \{(x, y, x) \mid x, y \in R\}$ show that $R^3 = W_1 \oplus W_2$,

hindustudyhub.com

W_1 और W_2 R^3 के उप–स्पेस है यदि $W_1 = \{(0,0,2)z : z \in R\}$ और $W_2 = \{(x, y, x) | x, y \in R\}$, दिखाइए कि $R^3 = W_1 \oplus W_2$

2. a) Show that the matrix

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

is diagonalizable. Hence find diagonal and transforming matrix.
दिखाइए कि मैट्रिक्स

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

विकर्णीय है अतः डायगोनल और ट्रांसफॉर्मिंग मैट्रिक्स खोजो।

b) Find the characteristic equation of the matrix

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Hence find A−1
मैट्रिक्स

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

का अभिलाक्षणिक समीकरण ज्ञात कीजिए अतः A−1 ज्ञात कीजिए।

3. a) Find all the Eigen values and a basis of each Eigen space of the linear operator $T : R^2 \rightarrow R^2$ defined by
$T(x, y) = (x + 2y, 3x + 2y)$.
$T(x, y) = (x + 2y, 3x + 2y)$ द्वारा परिभाषित रैखिक ऑपरेटर $T : R^2 \rightarrow R^2$ के प्रत्येक Eigen values और Eigen space का आधार खोजें।

b) If α and β are vectors in an inner product space, then show that

$$\|\alpha + \beta\|^2 + \|\alpha - \beta\|^2 = 2\|\alpha\|^2 + 2\|\beta\|^2$$

यदि α और β एक आंतरिक उत्पाद स्पेस में सदिश है, तो दिखाइए कि

$$\|\alpha + \beta\|^2 + \|\alpha - \beta\|^2 = 2\|\alpha\|^2 + 2\|\beta\|^2$$

hindistudyhub.com

4. a) State and prove primary decomposition theorem.
प्राथमिक अपघटन प्रमेय को लिखिए और सिद्ध कीजिए।

b) $T : IR^2 \to IR^2$ by

$$\tau\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Find all T-invariant subspace of $IR^2(R)$.

$T : IR^2 \to IR^2$

$$\tau\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

द्वारा $IR^2(R)$ के सभी T-अपरिवर्ती उप-स्पेस ज्ञात कीजिए।

5. a) Check whether the linear operator T, defined on C^2 by $T(x, y) = (2x + 2y, x + 2y)$ is

i) Self adjoint ii) Unitary.

जाँच करें कि क्या $T(x, y) = (2x + 2y, x + 2y)$ द्वारा C^2 पर परिभाषित रैखिक संकारक T है

i) स्व-सम्मिलित ii) एकात्मक

b) Let A be an $n \times n$ matrix over K. Show that the mapping defined by $f(x, y) = x^TAy$ is a bilinear form.
मान लीजिए कि A, K के ऊपर $n \times n$ मैट्रिक्स है। दिखाइए कि $f(x, y) = x^TAy$ द्वारा परिभाषित मानचित्रण एक द्विरेखीय रूप है।

6. a) Find the Jordan canonical form of the matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ -3 & 8 & 3 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix}$$

आव्यूह

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ -3 & 8 & 3 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix}$$

का जॉर्डन विहित रूप ज्ञात कीजिए।

hindistudyhub.com

b) Prove that if x is an eigen vector for the corresponding to eigne value **λ,** then αx is also an eigen vector of T corresponding to the same eigen value λ; α is a non zero scalar.

सिद्ध कीजिए कि यदि x, eigen मान **λ,** के संगत एक eigen सदिश है, तो αx भी उसी eigen मान λ के संगत T का एक eigen सदिश है, α एक गैर-शून्य अदिश है।

7. a) Let W be the subspace of $IR^3(C)$ spanned by (0, 1, −1) and (1, −1, −1). Find a basis of A(W).

मान लीजिए W (0, 1, −1) और (1, −1, −1) द्वारा फैला हुआ $IR^3(C)$ का सबस्पेस है। A(W) का आधार ज्ञात कीजिए।

b) Find the linear transformation $T : IR^2 \rightarrow IR^2$ for which T(2, 3) = (4, 6) and T(1, 0) = (0, 0).

$T : IR^2 \rightarrow IR^2$ का रैखिक रूपांतरण ज्ञात कीजिए जिसके लिए T(2, 3) = (4, 6) तथा T(1, 0) = (0, 0)।

8. a) $$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Find minimal polynomial of A.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

A का न्यूनतम बहुपद ज्ञात कीजिए।

b) $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Find characteristic equation.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

अभिलक्षणिक समीकरण ज्ञात कीजिए।

******

hindistudyhub.com