Total No. of Questions : 8]	[Total No. of Printed Pages : 4

Roll No. ....

CY-401 (GS)

B.Tech., IV Semester

Examination, June 2023

Grading System (GS)

Introduction to Linear Algebra

Time : Three Hours

Maximum Marks : 70

Note: i) Answer any five questions.

किन्ही पाँच प्रश्नों को हल कीजिए।

ii) All questions carry equal marks.

सभी प्रश्नों के समान अंक है।

iii) In case of any doubt or dispute the English version question should be treated as final.

किसी भी प्रकार के संदेह अथवा विवाद की स्तिथि मैं अंग्रेजी भाषा के प्रश्न को अंतिम माना जायेगा।

1. a) Suppose V is finite dimensional and U is subspace of V. Show that U = V if and only if $U^\circ = \{0\}$.

मान लीजिए कि V परिमित आयामी है और U, V का एक समुच्चय है। दिखाएं कि U = V केवल तभी जब $U^\circ = \{0\}$ हो।

b) Show that the mapping $T : V_3(R) \to V_3(R)$ defined as $T(a_1, a_2, a_3) = (3a_1 - 2a_2 + a_3, a_1 - 3a_2 - 2a_3)$ is a linear transformation from $V_3(R)$ into $V_2(R)$.

दिखाएं कि मैपिंग $T : V_3(R) \to V_3(R)$ रूप में परिभाषित $T(a_1, a_2, a_3) = (3a_1 - 2a_2 + a_3, a_1 - 3a_2 - 2a_3)$ $V_3(R)$ से $V_2(R)$ में एक रैखिक परिवर्तन है।

2. a) Suppose V is finite dimensional and U is a subspace of V. Then prove that

$$\dim\left(\frac{V}{M}\right) = \dim V - \dim U$$

मान लीजिए कि V परिमित आयामी है और, U, V का एक उप समूह है। फिर साबित करें कि

$$\dim\left(\frac{V}{M}\right) = \dim V - \dim U$$

b) Write short note on :

i) Cayley-Hamilton theorem

ii) Annihilating Polynomials

संक्षिप्त टिप्पणी लिखें

i) केली–हैमिल्टन प्रमेय

ii) बहुपदों का विनाश

3. a) Let a, b, c be elements of a field F, and let A be the following 3 × 3 matrix over F,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & c \\ 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & a \end{bmatrix}$$

Prove that the characteristic polynomial for A is $x^3 - ax^2 - bx - c$ and that it is also the minimal polynomial for A.

मान लीजिए कि a, b, c एक क्षेत्र F के तत्व हैं, और A को F पर निम्नलिखित 3 × 3 मैट्रिक्स होने दें,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & c \\ 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & a \end{bmatrix}$$

साबित करें कि A के लिए विशेष बहुपद $x^3 - ax^2 - bx - c$ है और यह A के लिए न्यूनतम बहुपद भी है।

b) Let A be an $n \times n$ triangular matrix over the field F. Prove that characteristic values of A are the diagonal entries of A. (i.e., the scalars Aii).
मान लीजिए कि A क्षेत्र F के ऊपर एक $n \times n$ त्रिकोणीय मैट्रिक्स है। साबित करें कि A के विशिष्ट मान A की विकर्ण प्रविष्टियाँ हैं (यानी, स्केलर Aii)।

4. Diagonalize the following matrices

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

निम्नलिखित मैट्रिक्स को विकर्णिक करें

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

5. a) Show that $V_2(R)$ is an inner product space defined by
$(\alpha, \beta) = 3a_1b_1 + 2a_2b_2$, $\alpha = (a_1, a_2), \beta = (b_1, b_2) \in V_2(R)$
दिखाएं कि $V_2(R)$ एक आंतरिक उत्पाद स्थान है जिसे $(\alpha, \beta) = 3a_1b_1 + 2a_2b_2$, $\alpha = (a_1, a_2), \beta = (b_1, b_2) \in V_2(R)$ द्वारा परिभाषित किया गया है।

b) Explain Jordan blocks with suitable examples.
जॉर्डन ब्लॉक को उपयुक्त उदाहरण के साथ समझाइए।

6. Show that "Two nilpotent linear transformations are similar if and only if they have same invariants".
दिखाइये कि किन्हीं दो निल पोटेंट रेखिक परिवर्तन समरूप हैं यदि और केवल तभी जब उनके पास समान अपरिवर्तनीय हैं।

7. a) Find a basis for the space of all skew-symmetric linear forms on R^n.
R^n पर सभी तिरछे-सममित रैखिक रूपों के स्थान के लिए आधार ज्ञात कीजिए।

b) Find all bilinear forms on the space of $n \times 1$ matrices over C which are invariant under O(n, C).
C के ऊपर $n \times 1$ मैंट्रिसिस के स्थान पर सभी द्विरेखीय रूपों का पता लगाइए जो O(n, C) के अंतर्गत अपरिवर्तनीय हैं।

8. Write a short note on following (any two) :

a) Dual Spaces

b) Primary decomposition theorem

c) Bilinear forms

d) Inner product spaces

निम्नलिखित पर संक्षिप्त टिप्पणी लिखें (कोई दो)

अ) द्वैत रिक्त स्थान

ब) प्राथमिक अपघटन प्रमेय

स) द्विरेखीय रूप

द) आंतरिक उत्पाद रिक्त स्थान

******