

CY-401 (GS)
B.Tech., IV Semester
Examination, June 2024
Grading System (GS)
Introduction to Linear Algebra
Time : Three Hours

Maximum Marks : 70

- Note:** i) Answer any five questions.
किन्ही पाँच प्रश्नों को हल कीजिए।
- ii) All questions carry equal marks.
सभी प्रश्नों के समान अंक है।
- iii) In case of any doubt or dispute the English version question should be treated as final.
किसी भी प्रकार के संदेह अथवा विवाद की स्थिति में अंग्रेजी भाषा के प्रश्न को अंतिम माना जायेगा।

1. a) Let U_1, U_2 and U_3 be subspaces of a vector space V . Prove that

$$U_1 \cap (U_2 + (U_1 \cap U_3)) = (U_1 \cap U_2) + (U_1 \cap U_3)$$

मान लीजिए U_1, U_2 और U_3 एक सदिश समष्टि V के उपसमुच्चय हैं। सिद्ध कीजिए कि

$$U_1 \cap (U_2 + (U_1 \cap U_3)) = (U_1 \cap U_2) + (U_1 \cap U_3)$$

b) Let V be a vector space. Show that $\dim(V) = n \geq 1$ if and only if there exist one-dimensional subspaces U_1, \dots, U_n such that $V = U_1 \oplus \dots \oplus U_n$.

मान लीजिए V एक सदिश समष्टि है। दिखाइए कि $\dim(V) = n \geq 1$ यदि और केवल यदि एक-आयामी उपस्थान U_1, \dots, U_n मौजूद है, ऐसे कि $V = U_1 \oplus \dots \oplus U_n$ ।

2. a) Let V be a vector space over a field F and $T : V \rightarrow V$ be a linear transformation. Define the annihilator of a subspace W of V as

$$W^\circ = \{ f \in V^* \mid f(w) = 0 \text{ for all } w \in W \},$$

where V^* is the dual space of V . Prove that W° is a subspace of V^* and determine its dimension in terms of the dimension of V and W .

मान लीजिए कि V एक सदिश समष्टि है F पर और $T : V \rightarrow V$ एक रैखिक परिवर्तन है। V के उप-समष्टि W के समुच्चयक को इस प्रकार परिभाषित किया जाता है

$$W^\circ = \{ f \in V^* \mid f(w) = 0 \text{ for all } w \in W \},$$

जहाँ V^* , V का द्वैत समष्टि है। सिद्ध करें कि W° , V^* का उप-समष्टि है और इसके आयाम को V और W के आयामों के सन्दर्भ में निर्धारित कीजिए।

- b) Let A be the 4×4 real matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Show that the characteristic polynomial for A is $x^2(x - 1)^2$ and that is also the minimal polynomial.

मान लीजिए A , 4×4 वास्तविक मैट्रिक्स है

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

दिखाइये कि A के लिये अभिलाक्षणिक बहुपद $x^2(x - 1)^2$ है और वह न्यूनतम बहुपद भी है।

3. a) Let W be an invariant subspace for linear operator T . Prove that the minimal Polynomial for the restriction operator $T|_W$ divides the minimal polynomial for T , without referring to matrices.

मान लीजिए w , रेखिक ऑपरेटर T के लिए एक अपरिवर्तनीय उपस्थान है। सिद्ध कीजिए कि प्रतिबंध ऑपरेटर T_w के लिए न्यूनतम बहुपद, मैट्रिक्स को संदर्भ लीए बिना, T के लिए न्यूनतम बहुपद को विभाजित करता है।

b) For the matrix A:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Verify Cayley-Hamilton theorem by finding its characteristic polynomial and substituting the matrix into it.

मैट्रिक्स A के लिए

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

केली-हैमिल्टन प्रमेय का सत्यापन इसके अभिलाक्षणिक बहुपद को ज्ञात करके तथा इसमें मैट्रिक्स प्रतिस्थापित करके करें।

4. a) Consider the matrix A:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Find the Jordan canonical form of the matrix A and the corresponding Jordan basis.

मैट्रिक्स A पर विचार करें

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

मैट्रिक्स A का जॉर्डन कैनोनिकल फॉर्म और संगत जॉर्डन आधार ज्ञात करें।

- b) Let V be an inner product space, and let α and β be vectors in V . Show that $\alpha = \beta$ if and only if $\langle \alpha | \gamma \rangle = \langle \beta | \gamma \rangle$ for every γ in V .

मान लें कि V एक आंतरिक गुणनफल स्थान (inner product space) है और α और β V में सदिश (vectors) हैं। सिद्ध करें कि $\alpha = \beta$ तब और केवल तब होता है जब V में हर γ के लिए $\langle \alpha | \gamma \rangle = \langle \beta | \gamma \rangle$ हो।

5. a) Consider a matrix A given by:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

- i) Find the eigen values and corresponding eigen vectors of A .
ii) Determine the invariant subspaces corresponding to each distinct eigen value.

दिए गए मैट्रिक्स A पर विचार करें

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

- i) A के आइगेन वैल्यूज और संबंधित आइगेन वेक्टर का पता लगाएं।
ii) प्रत्येक अलग आइगेन वैल्यूज के अनुरूप अपरिवर्तनीय उपस्थानों का निर्धारण करें।

- b) Given that the set $\{(1, 0, 0) (0, 2, 1) (2, 0, 1)\}$ is a basis of R^3 . If $T : R^3 \rightarrow R^3$ is a linear transformation such that $T(1, 0, 0) = (0, 0, 1)$, $T(0, 2, 1) = (1, 2, 0)$ and $T(2, 0, 1) = (1, 1, 1)$. Find $T(2, -3, 4)$.

दिया गया है कि सेट $\{(1, 0, 0) (0, 2, 1) (2, 0, 1)\}$, R^3 का आधार है। यदि $T : R^3 \rightarrow R^3$ एक रैखिक परिवर्तन है जैसे कि $T(1, 0, 0) = (0, 0, 1)$, $T(0, 2, 1) = (1, 2, 0)$ और $T(2, 0, 1) = (1, 1, 1)$ । $T(2, -3, 4)$ ज्ञात कीजिए।

6. a) If V is the space of all polynomials of degree less than or equal to n over a field F , prove that the differentiation operator on V is nilpotent.

यदि V एक क्षेत्र F पर डिग्री n से कम या उसके बराबर सभी पॉलीनोमियलो का स्थान है, तो सिद्ध करें कि V पर विभेदन ऑपरेटर शून्यघातिक है।

- b) Consider a 2×2 matrix G with characteristic polynomial $(t + 1)^2(t - 2)$ and minimal polynomial $(t + 1)(t - 2)$. Determine the primary decomposition of R^2 with respect to G .

अभिलाक्षणिक बहुपद $(t + 1)^2(t - 2)$ और न्यूनतम बहुपद $(t + 1)(t - 2)$ के साथ 2×2 मैट्रिक्स G पर विचार करें। G के सापेक्ष R^2 का प्राथमिक अपघटन निर्धारित करें।

7. a) Let $A, B \in O(n)$, the orthogonal group of real $n \times n$ matrices. Define the bilinear form as:

$$B(A, B) = \text{tr}(A^T B)$$

Verify if B preserves the group structure of $O(n)$.

मान लें $A, B \in O(n)$, वास्तविक $n \times n$ मैट्रिक्स के ऑर्थोगोनल समूह हैं। द्विरेखीय रूप को निम्नलिखित रूप से परिभाषित करें:

$$B(A, B) = \text{tr}(A^T B)$$

सत्यापित करें कि क्या B , $O(n)$ की समूह संरचना को संरक्षित करता है।

- b) Write a detail note on skew symmetric bilinear forms.

तिरछे सममित द्विरेखीय रूपों पर एक विस्तृत नोट लिखें।

8. Write short note on any two :

- a) Cayley-Hamilton theorem
b) Primary decomposition theorem
c) Invariant subspaces

किन्हीं दो पर संक्षिप्त टिप्पणी लिखिए।

- अ) केली-हैमिल्टन प्रमेय
ब) प्राथमिक अपघटन प्रमेय
स) अपरिवर्तनीय उपस्थान
