

**CY-401**

**B.Tech./B.Tech. (Working Professional) IV Semester**

Examination, June 2025

**Grading System (GS) / Working Professional**

**Introduction to Linear Algebra**

**Time : Three Hours**

**Maximum Marks : 70**

- Note:**
- i) Answer any five questions.  
किन्ही पाँच प्रश्नों को हल कीजिए।
  - ii) All questions carry equal marks.  
सभी प्रश्नों के समान अंक है।
  - iii) In case of any doubt or dispute the English version question should be treated as final.  
किसी भी प्रकार के संदेह अथवा विवाद की स्थिति में अंग्रेजी भाषा के प्रश्न को अंतिम माना जायेगा।
1. a) Define subspace of a vector space. Show that the quotient space of finitely generated space is finitely generated.  
सदिश समष्टि के उपसमष्टि को परिभाषित करें। दर्शाए की परिमित रूप से जानती समष्टि का भागफल समष्टि परिमित रूप से जनित होता है।  
b) State and prove Rank nullity theorem.  
रैंक शून्यता प्रमेय बताइए और सिद्ध करें।
  2. a) Define subspace of a vector space. Show that the quotient space of finitely generated space is finitely generated.  
सदिश समष्टि के उपसमष्टि को परिभाषित करें। दर्शाए की परिमित रूप से जानती समष्टि का भागफल समष्टि परिमित रूप से जनित होता है।

- b) Define Characteristic polynomials. Show that all eigen values of  $A^* A$  are real and it is unitary similar to diagonal matrix.

अभिलक्षणिक बहुपद को परिभाषित करें। दर्शाइए कि  $A^* A$  के सभी आइगेन मान वास्तविक हैं तथा यह विकर्ण आव्यूह के समान एकात्मक है।

3. a) State and prove Cayley Hamilton theorem.

केली हैमिल्टन प्रमेय बताइए और सिद्ध करें।

- b) Let  $T$  be a linear transformation on a vector space  $V$  of dimension  $n$ . Suppose that  $T$  has distinct eigen values. Then show that  $T$  is diagonalizable.

मान लीजिए कि  $T$ ,  $n$  आयाम वाले सदिश समष्टि  $V$  पर एक रेखिक परिवर्तन है। मान लीजिए कि  $T$  के अलग-अलग आइगेन मान हैं। फिर दिखाएँ कि  $T$  विकर्णीय है।

4. a) Define adjoint of Linear Transformation. The linear transformation  $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  defined by  $T(x, y, z) = (x - 2y + z, 2x + y + 2z, 3x - y + z)$  then show that  $T$  is a linear transformation.

रेखिक परिवर्तन के सहायक को परिभाषित करें। रेखिक परिवर्तन  $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  को  $T(x, y, z) = (x - 2y + z, 2x + y + 2z, 3x - y + z)$  द्वारा परिभाषित किया जाता है, फिर दिखाएं कि  $T$  एक रेखिक परिवर्तन है।

- b) Let  $W$  be a subspace of finite dimensional inner product space  $V$  and  $x \in V$  such that  $\langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle \leq \langle y, y \rangle$  for all  $y \in W$ . Then show that  $x \in W^\perp$ .

मान लीजिए  $W$  परिमित आयामी आंतरिक गुणन समष्टि  $V$  का एक उपसमुच्चय है और  $x \in V$  एक तत्व है जिसके लिए  $\langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle \leq \langle y, y \rangle$  सभी  $y \in W$  के लिए है। तो सिद्ध करें कि  $x \in W^\perp$ ?

5. a) Show that there is no proper open subspace of an inner product space.

दर्शाइए कि आंतरिक गुणन स्थान का कोई उचित खुला उप-स्थान नहीं है।

- b) Define Canonical form of linear transformation. Show that every  $m \times n$  matrix is equivalent to unique matrix in one of canonical form.

रेखिक परिवर्तन के विहित रूप को परिभाषित करें। दिखाइए कि प्रत्येक  $m \times n$  मैट्रिक्स विहित रूप में अद्वितीय मैट्रिक्स के बराबर है।

6. a) Show that all eigen values of hermitian matrix are all real.

दर्शाइए कि हर्मिटियन मैट्रिक्स के सभी आइगेन मान वास्तविक हैं।

- b) Define Jordan canonical form. Reduce the matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Into Jordan canonical forms.

जॉर्डन केनॉनिकल फॉर्म को परिभाषित करें। मैट्रिक्स को

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

जॉर्डन केनॉनिकल फॉर्म में कम करें।

7. a) Show that a bilinear form on  $V$  is a product of linear functional iff it is of rank 1.

दर्शाइए कि  $V$  पर द्विरेखीय रूप रेखिक कार्यात्मक का गुणनफल है तभी और केवल तभी जब वह रैंक 1 का हो।

- b) State and prove Gram Schmidt orthogonalization process.

ग्राम श्मिट ऑर्थोगोनलाइज़ेशन प्रक्रिया बताइए और साबित करें।

8. Write short notes on

- i) Symmetric bilinear forms
- ii) Group preserving bilinear forms
- iii) Inner product space

संक्षिप्त टिप्पणियाँ लिखें।

- i) सममित द्विरेखीय रूप
- ii) समूह परिरक्षण द्विरेखीय रूप
- iii) आंतरिक उत्पाद स्थान

\*\*\*\*\*