Roll No. ....

CY-401 (GS)

B.Tech., IV Semester

Examination, November 2023

Grading System (GS)

Introduction to Linear Algebra

Time : Three Hours

Maximum Marks : 70

Note: i) Answer any five questions.
किन्ही पाँच प्रश्नों को हल कीजिए।

ii) All questions carry equal marks.
सभी प्रश्नों के समान अंक है।

iii) In case of any doubt or dispute the English version question should be treated as final.
किसी भी प्रकार के संदेह अथवा विवाद की स्तिथि मैं अंग्रेजी भाषा के प्रश्न को अंतिम माना जायेगा।

1. a) Show that $u_1 + u_2 + u_3$ is not a direct sum if
दिखाएं कि $u_1 + u_2 + u_3$ एक प्रत्यक्ष राशि नहीं है।

$$u_1 = \{(x, y, 0) \in F^3 \text{ where } x, y \in F\}$$
$$u_2 = \{(0, 0, z) \in F^3 \text{ where } z \in F\}$$
$$u_3 = \{(0, y, y) \in F^3 \text{ where } y \in F\}$$

b) Let F be a field of complex numbers and let $T : F^3 \to F^3$ defined by $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 + 2x_3, 2x_1 + x_2 - x_3, x_1 - 2x_2)$. Verify that T is linear transformation.

मान लीजिए कि F जटिल संख्याओं का एक क्षेत्र है और $T: F^3 \to F^3$ को $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 + 2x_3, 2x_1 + x_2 - x_3, x_1 - 2x_2)$ द्वारा परिभाषित किया गया है। सत्यापित करें कि T रैखिक परिवर्तन है।

2. a) Suppose V is finite dimensional and U is subset to V. Show that $U = \{0\}$ if and only if $U^\circ = V^1$.

मान लीजिए कि V परिमित आयामी है और U, V का उपसमुच्चय है। दिखाएं कि $U = \{0\}$ है यदि और केवल तभी जब $U^\circ = V^1$ है।

b) Write short note on following:

i) Characteristic values and characteristic vectors

ii) Algebraic multiplicity and Geometric multiplicity

निम्नलिखित पर संक्षिप्त टिप्पणी लिखें:

i) विशिष्ट मूल्य और विशेषता वेक्टर

ii) बीज गणितीय बहुलता और ज्यामितीय बहुलता

3. a) Let A be 4 × 4 real matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Show that the characteristic polynomial for A is $x^2 (x-1)^2$ and that it is also the minimal polynomial.

मान लीजिए कि A 4 × 4 वास्तविक मैट्रिक्स

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

है। दर्शाइए कि A के लिए विशिष्ट बहुपद $x^2 (x-1)^2$ है और यह न्यूनतम बहुपद भी है।

b) Let T be a linear operator on the n - dimensional vector space V and suppose that T has n - distinct characteristic values. Prove that T is diagonalizable.

मान लीजिए कि T, n-आयामी वेक्टर स्पेस V पर एक रैखिक ऑपरेटर है और मान लीजिए कि T के पास n-विशिष्ट विशेषमान हैं। साबित करें कि T विकर्णीय है।

4. Find the eigen values and eigen vectors of

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

के आइजिन मान और आइजिन वेक्टर ज्ञात कीजिये।

5. a) Explain invariant subspace with suitable examples.

उपयुक्त उदाहरणों के साथ अपरिवर्तनीय कथनों की व्याख्या कीजिए।

b) Find Jordan canonical form of the matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

मैट्रिक्स

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

का जॉर्डन कैनोनिकल रूप ज्ञात कीजिए।

6. If T $\in$ A(V) has all it's characteristic roots in F, then there exists a basis of V such that matrix representation of T is triangular. Prove it.
यदि T $\in$ A(V) की F में इसकी सभी विशेषता जड़ें हैं, तो V का एक आधार मौजूद है जैसे कि T का मैट्रिक्स प्रतिनिधित्व त्रिकोणीय है। इसे साबित करो।

7. a) Find all Skew - symmetric bilinear forms on R^3.
R^3 पर सभी सममित द्विरेखीय रूप ज्ञात कीजिये।

b) Find all bilinear forms on the space $n \times 1$ matrices over R which are invariant under O(n, R).
स्पेस $n \times 1$ मैट्रिक्स ओवर R पर सभी बिलिनियर फॉर्म खोजें जो O(n, R) के तहत अपरिवर्तनीय हैं।

8. Write a short note on the following (any two) :

a) Quotient spaces
b) Direct sum decomposition
c) Self adjoint
b) Jordan blocks

निम्नलिखित पर संक्षिप्त टिप्पणी लिखिए। (कोई दो)

अ) भागफल रिक्त स्थान
ब) प्रत्यक्षयोग अपघटन
स) स्वयं से जुड़ा हुआ
द) जॉर्डन ब्लॉक

******